

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ مبهم} \right)$$

$$\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ مبهم} \right) \quad (\text{۵/۵ نمره})$$

$$\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ مبهم} \right)$$

$$\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6} \quad (\text{۵/۵ نمره})$$

بنابراین حد حاصل برابر $e^{-1/6}$ می باشد. (۵/۵ نمره)

ب) در ابتدا طبق خواص تابع جزء صحیح داریم:

$$\begin{array}{ccc} x-1 \leq [x] \leq x \\ 2x-1 \leq [2x] \leq 2x \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ nx-1 \leq [nx] \leq nx \end{array} \quad (\text{۵/۵ نمره})$$

حال طرفین نامساوی های فوق را با هم جمع می کنیم:

$$(1+2+\dots+n)x - n \leq [x] + [2x] + \dots + [nx] \leq (1+2+\dots+n)x$$

با استفاده از روابط بین اعداد طبیعی خواهیم داشت:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right) x - n \leq [x] + [2x] + \dots + [nx] \leq \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) x \quad (\text{۵/۵ نمره})$$

حال طرفین نامساوی های فوق را بر n^2 تقسیم کرده و کسره های حاصل را ساده می کنیم:

$$\frac{x + \frac{x}{n} - \frac{2}{n}}{2} \leq \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} \leq \frac{x + \frac{x}{n}}{2} \quad (\text{۲۵/۵ نمره})$$

حال با گرفتن حد از طرفین نامساوی های فوق و با استفاده از قضیه فشردگی خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} = \frac{x}{2} \quad (\text{۷۵/۵ نمره})$$